مبرهنة: لتكن e عنصراً جامداً في نصف الزمرة S، ولتكن H_e مجموعة جزئية حقيقية من eSe تحوي كل عنصر من eSe يملك نظيراً في eSe بالنسبة إلى e فإن:

① H_e زمرة جزئية من S تحوي e.

② H_e تحوي أي زمرة جزئية G من S تتقاطع مع H_e أي أن:

$$G \cap H_e \neq \emptyset \Rightarrow G \subseteq H_e$$

البرهان:

① إن eSe هي نصف زمرة جزئية من S لها العنصر الحيادي e.

$\forall a,b \in eSe \Rightarrow$ (حسب تمرين سابق) $ae = ea = a$ ، $be = eb = b \Rightarrow abe = ab = eab$

أي أن:

$(ab)e = e(ab) = ab$ (حسب تمرين سابق) $\Rightarrow ab \in eSe$ ⇐ eSe نصف زمرة جزئية من S.

$\forall a \in eSe \Rightarrow ae = ea = a \Rightarrow$ e حيادي في eSe

إذا كان $x,y \in eSe$ بحيث أن $xy = yx = e$ فإن $x,y \in H_e$ (حسب تعريف H_e) كذلك فإن $e \in H_e$ إضافة إلى ذلك فإنه إذا كان $u,v \in H_e$ ⇐ توجد $u',v' \in H_e$ بحيث يكون:

$uu' = u'u = e$ ، $vv' = v'v = e$

$(uv)(v'u') = u(vv')u' = ueu' = uu' = e$

$(v'u')(uv) = v'(u'u)v = v'ev = v'v = e$

ومنه نستنتج أنه مهما يكن $u,v \in H_e$ فإن $uv \in H_e$

وبالتالي نستنتج أن H_e زمرة جزئية من S تحوي e.

② نفرض أن G زمرة جزئية من S بحيث أن $G \cap H_e \neq \emptyset$، ونفرض أن f حيادي في G

وليكن $a \in G \cap H_e$، و g نظير a في G، و h نظير a في H_e.

$$e = ha = haf = ef = eag = ag = f$$

إذاً الحيادي في G هو e، وبالتالي $G \subseteq eSe$ (وذلك لأنه: $\forall c \in G \Rightarrow c = ece \in eSe$) وحسب تعريف H_e تكون: $G \subseteq H_e$.

(لأن عناصر G من eSe، ولكل عنصر من الزمرة G نظير في G أي في eSe وبالتالي فإن G تحقق شروط الزمرة H_e).



تعريف: نسمي الزمرة الجزئية G من النصف الزمرة S بزمرة جزئية عظمى في S إن لم تكن محتواة في أي زمرة جزئية أخرى في S.

مبرهنة:

لتكن S نصف زمرة ذات عنصر حيادي e، ولتكن H_e الزمرة الجزئية من S المعرفة في المبرهنة السابقة. عندئذ:

1) H_e زمرة جزئية عظمى في S.

2) أي زمرة جزئية عظمى G من S هي من الشكل H_f حيث f عنصر حيادي في G.

3) الزمر الجزئية العظمى المختلفة في S كلها منفصلة (أي تقاطع أي اثنتين منها هو المجموعة الخالية)

البرهان:

1) لتكن G زمرة جزئية عظمى من S تحوي H_e إذاً $G \supseteq H_e \Leftarrow G \cap H_e \neq \emptyset$ (حسب المبرهنة الأخيرة) $\Leftarrow G \subseteq H_e \Leftarrow G = H_e$

$\Leftarrow H_e$ زمرة جزئية عظمى في S.

2) لتكن G زمرة جزئية عظمى تملك الحيادي f وبالتالي فإن: $G \cap H_f \neq \emptyset$ لأن $(f \in G \cap H_f) \Leftarrow$ (وحسب المبرهنة الأخيرة) $G \subseteq H_f$ لكن G زمرة جزئية عظمى مفروضة وبالتالي ينتج أن $G = H_f$.

3) من ② نستنتج أن مجموعة الزمر الجزئية العظمى في S هي:

$$A = \{H_e ; e \in S ; e = e^2\}$$

ليكن e و f عنصرين حياديين في S بحيث أن $e \neq f$ فإن كلاً من H_e، H_f هي زمرة جزئية عظمى فإن: $H_e \cap H_f = \emptyset$ وذلك لأنه إذا افترضنا خلاف ذلك أي إذا كان $H_e \cap H_f \neq \emptyset$ وبالتالي:

$H_e \subseteq H_f$ و $H_f \subseteq H_e \Rightarrow H_e = H_f \Rightarrow e = f$ وهذا خلاف الفرض.

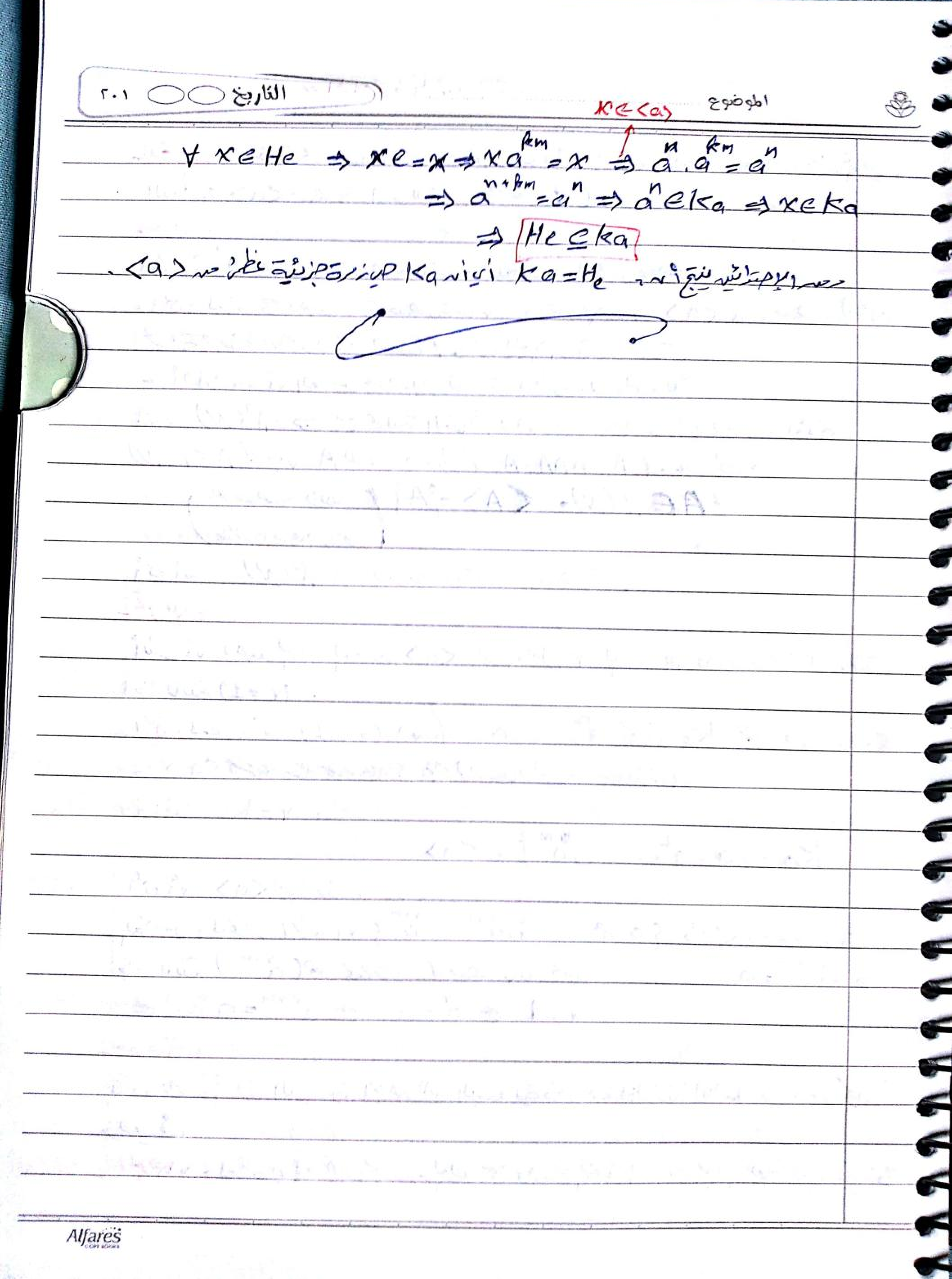
تمرين: أثبت أن: K_a زمرة جزئية عظمى من نصف الزمرة الدوارة $\langle a \rangle$ ذات الدليل r والدور m.

الحل: إن: $K_a = \{a^r, a^{r+1}, \ldots, a^{r+m-1}\}$ هي زمرة جزئية دوارة من $\langle a \rangle$

$H_e \cap K_a \neq \emptyset \Leftarrow H_e$ زمرة جزئية عظمى في $\langle a \rangle \Leftarrow e = a^{km}$ عنصر حيادي

(لأن $e \in H_e \cap K_a$)

$$\Rightarrow \boxed{K_a \subseteq H_e}$$



$x \in \langle a \rangle$

$$\forall x \in H_e \Rightarrow xe = x \Rightarrow x a^{km} = x \Rightarrow a^{n} \cdot a^{km} = a^{n}$$

$$\Rightarrow a^{n+km} = a^{n} \Rightarrow a^{n} \in K_a \Rightarrow x \in K_a$$

$$\Rightarrow \boxed{H_e \subseteq K_a}$$

ومن الاحتوائين ينتج أن $K_a = H_e$ أي أن K_a زمرة جزئية فعلية من $\langle a \rangle$.



الموضوع " المحاضرة الثامنة " التاريخ ٢٠١

تعريف: نقول عن نصف زمرة S أنها دورية، إذا كان كل من أنصاف الزمر الجزئية الدوارة $\langle a \rangle$ منتهية (من أجل $\forall a \in S$).

تمرين:

أثبت أن كل نصف زمرة منتهية تكون دورية ولكن العكس غير صحيح.

الحل: لتكن S نصف زمرة منتهية فإن $\forall a \in S$ فإن $\langle a \rangle$ تكون منتهية (لأنها مجموعة جزئية من مجموعة منتهية) ومنه ينتج أن S دورية.

من أجل إثبات أن العكس غير صحيح يكفي أن نعطي مثالاً على ذلك.

لتكن $S = P(N)$ مع عملية التقاطع، إن S هي نصف زمرة دورية لأنه $\forall A \in P(N)$ فإن A هو عنصر جامد (لأن $A^2 = A \cap A = A$) وبالتالي:

$$\forall A \in P(N) ; \langle A \rangle = \{A\}$$ (وهي منتهية لأنها مؤلفة من عنصر واحد)

أي أن $S = P(N)$ دورية ولكنها غير منتهية.

تمرين:

أثبت أن نصف الزمرة الدوارة $\langle a \rangle$ ذات الدليل r والدور m تكون زمرة إذا وفقط إذا كانت $(r = 1)$.

الحل: لنفرض أن $(r = 1)$ بما أن $K_a = \{a^r, a^{r+1}, \ldots, a^{r+m-1}\}$ هي زمرة جزئية من $\langle a \rangle$ [شطب] (حسب مبرهنة سابقة).

فعندها $r = 1$:

$$K_a = \{a, a^2, \ldots, a^m\} = \langle a \rangle$$

أي أن $\langle a \rangle$ هي زمرة.

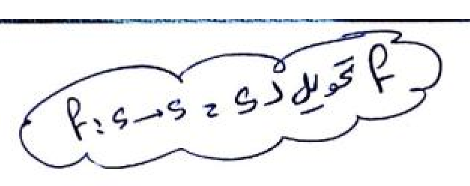
العكس: لنفرض الآن أن $\langle a \rangle = \{a, a^2, \ldots, a^r, a^{r+1}, \ldots, a^{r+m-1}\}$ زمرة دوارة فإذا كانت (a^{r+m-1}) هو العنصر الحيادي فيها فإنه يحقق: $a \, a^{r+m-1} = a$

$\Leftarrow a^{r+m} = a \Leftarrow a^r = a \Leftarrow r = 1$.

مبرهنة:

تكون نصف الزمرة الدورية الاختزالية اليسارية S زمرة إذا وفقط إذا ملكت عنصراً جامداً وحيداً.

البرهان: ليكن e العنصر الجامد الوحيد في نصف الزمرة الدورية الاختزالية اليسارية S





الموضوع ....



وهذا يكون S ∋ a فإن <a> منتهية وبالتالي لها الدور m والدليل r.
لنفرض جدلاً أن r > 1 فإن $a^{r+m} = a^r \Rightarrow a\,a^{r+m-1} = a\,a^{r-1}$
وبما أنها اختزالية يسارية ⇐ $a^{r+m-1} = a^{r-1}$ وهذا يخالف تعريف r وبالتالي فالفرض الجدلي خاطئ أي أن (r=1) ومنه $<a> = K_a$ هي زمرة جزئية من S.
حيادها e لأنه الجامد الوحيد وبالتالي فإن:
$$ea = ae = a \;;\; \forall a \in S.$$
فالجامد e هو حيادي في S.
كما أنه ∀a ∈ S فإن $a \in <a>$ وله نظير في <a> وبالتالي له نظير في S، أي أنه لكل عنصر من S نظير، وبما أن S نصف زمرة فهي زمرة (لأنها تحقق شروط الزمرة).
- العكس: لنفرض أن S زمرة فإن حياديها هو العنصر الجامد الوحيد فيها لأنه لو كان يوجد عنصر جامد آخر مثل a فإن $(a^2 = a) \Leftarrow$ $aa = ae$ وبما أنها اختزالية يسارية
⇐ $a = e$.

تمرين:

أثبت صحة ما يلي:
1- من أجل أي عنصر a من نصف زمرة دورية S توجد قوة له a مثل a^n بحيث يكون a^n عنصراً جامداً.
2- إن أي نصف زمرة دورية تحوي زمرة جزئية عظمى.

الحل: 1- S نصف زمرة دورية ⇐ ∀a ∈ S فإن <a> منتهية ⇐ لها دور m ودليل r
⇐ $K_a = \{a^r, a^{r+1}, \dots, a^{r+m-1}\}$ زمرة ⇐ K_a تملك عنصر حيادي أي أنه جامد مثل a^n حيث $n = r, \dots, m+r-1$ أي $a^n . a^n = a^n$.
2- S نصف زمرة دورية ⇐ من ① S تملك عنصر جامد من الشكل $(e = a^n)$ ⇐ (حسب مبرهنة سابقة) H_e زمرة جزئية عظمى وهي محتواة في S.

تمرين:

أثبت أن نصف الزمرة S هي نصف زمرة صفرية يمينية إذا وفقط إذا حققت أحد الشرطين التاليين:
1- كل تحويل لـ S هو انسحاب يميني. 2- الانسحاب اليساري الوحيد لـ S هو التطبيق المطابق.
الحل: لنفرض أن S هي صفرية يمينية أي أن $(xy = y)$; $\forall x, y \in S$
ليكن f تحويل لـ S فإن:
$$f(xy) = f(y) \quad ; \quad x\,f(y) = f(y) \text{ (لأن S صفرية يمينية)} \Rightarrow f(xy) = x\,f(y)$$

② لكن أن التطبيق المطابق: $I(xy) = xy = I(x)y$

أي أن I هو انسحاب يساري.

اذا كان g هو انسحاب يساري آخر لعنصر الزمرة S فإن:

$$g(y) = g(xy) = g(x)y \quad \text{(لأنه انسحاب يساري)}$$
$$= y$$

أي أن g هو تطبيق مطابق، أي أن الانسحاب اليساري الوحيد هو التطبيق المطابق.

العكس:

ص① لنفرض أن كل تحويل لـ S هو انسحاب يميني لـ S، وليكن التطبيق الثابت $f: S \to S$

حيث أن: $\forall x \in S: f(x) = y$ حيث $y \in S$، وليكن أيضاً $z \in S$

$$y = f(xz) \overset{\text{انسحاب يميني}}{=} xf(z) = xy \quad ; \forall x \in S$$

نحصل لكل y من جميع عناصر S فيكون: $xy = y \; ; \forall x,y \in S$

ومنه نستنتج أن S هي صفرية يمينية.

ص② لنفرض أن — الانسحاب اليساري الوحيد هو التطبيق المطابق، $\forall x,y \in S$ و a عنصر ثابت في S فإن:

$$\lambda_a(xy) = axy = (ax)y = \lambda_a(x)y$$

أي أن λ_a انسحاب يساري وحسب الفرض يكون λ_a تطبيق مطابق أي أن:

$x = I(x) = \lambda_a(x) = ax \Rightarrow ax = x$ وإذا عممنا a على S

بالتالي نستنتج أن: $\forall x,a \in S: ax = x$ أي أن S صفرية يمينية.



* الزمر الضعيفة طبولوجية :

في هذا الفصل سوف ندرس الزمر الضعيفة طبولوجية ، والتي هي أضعف من الزمر الطبولوجية أي أن كل زمرة طبولوجية هي زمرة ضعيفة طبولوجية ولكن العكس غير صحيح ، وعندها سنثبت بمثال وسوف ندرس الشروط اللازمة كي تكون الزمرة الضعيفة طبولوجية زمرة طبولوجية .

- تعريف :

نسمي الفضاء الطبولوجي G والذي تكون فيه G زمرة أيضاً بـ "زمرة ضعيفة طبولوجية" إذا كان التطبيق :

$$g_1 : G \times G \longrightarrow G$$

$$g_1(x,y) \longrightarrow xy$$

مستمر من أجل جميع القيم (x,y) في $G \times G$.

- تعريف :

إذا كانت G فضاءً طبولوجياً وزمرة بنفس الوقت فإننا ندعو G زمرة طبولوجية إذا كان التطبيق g_1 المعرف سابقاً مستمراً وكان إضافة إلى ذلك التطبيق : $g_2 : G \longrightarrow G$

$g_2 : x \longrightarrow x^{-1}$ مستمراً على G .

- ملاحظة :

إذا كانت الزمرة جمعية فإننا نستعيض عن xy بـ $x+y$ وعن x^{-1} بـ $-x$ وسوف نرمز للعنصر الحيادي في الزمرة الضربية بـ e وفي الزمرة الجمعية بـ 0 .

- ملاحظة :

كل زمرة طبولوجية تكون زمرة ضعيفة طبولوجية ولكن العكس غير صحيح .

- البرهان : من التعاريف السابقة ينتج أن كل زمرة طبولوجية هي زمرة ضعيفة طبولوجية . ومن أجل إثبات أن العكس غير صحيح يكفي أن نعطي مثالاً على ذلك :

لتكن $G=R$ مجموعة الأعداد الحقيقية وهي زمرة بالنسبة للجمع والتي تبديلية ، لنزود G بالطبولوجيا التي قاعدتها أسرة المجالات $\{ [a,b[\}$ جميع المجالات نصف المفتوحة من اليمين .

من أجل أي مجاورة $[a,b[$ للعنصر 0 ، فإن $[a,\frac{b}{2}[$ تكون أيضاً مجاورة للعنصر 0 .

ومنه ينتج أن التطبيق g_1 يكون مستمراً على $G \times G = R \times R$

فإذا أخذنا مثلاً النقطة $(1,4)$ من $R \times R$ فإن $g_1(1,4) = 5$

إن $[2,6[$ هي مجاورة للعدد 5 وإن $[1,2[$ مجاورة للعدد 1

وأيضاً $[4,5[$ مجاورة للعدد 4

$$g_1([1,2[\times [4,5[) = [5,7[\not\subset [2,6[$$



ملاحظة عامة بتعبير مجاورة

$g_1([1,\frac{3}{2}[\times[4,\frac{9}{2}[) = [5,6[\subseteq [2,6[$

وبالتالي فإن G زمرة نصف طبولوجية.

إن G ليس زمرة طبولوجية وذلك لأن التطبيق $g_2: G \to G$

$g_2: x \to -x$

ليس مستمراً في النقطة 0 مثلاً.

لأنه من أجل [illegible] أي مجاورة V للنقطة (-x) لا يمكن إيجاد مجاورة U للنقطة x بحيث يكون $g_2(U) \subseteq V$.

[0,2[مجاورة للصفر ولا يمكن إيجاد مجاورة مثل [0,1[للعنصر 0 بحيث يكون

$g_2([0,1[) =]-1,0] \not\subseteq [0,2[$

ملاحظة:

إذا وضعنا $U.V=\{xy; x\in U, y\in V\}$ ، $U^{-1}=\{x^{-1}; x\in U\}$ حيث U,V مجموعتان جزئيتان من G وبالنسبة للجمع:

$U+V=\{x+y; x\in U, y\in V\}$ ، $-U=\{-x; x\in U\}$

فإنه يمكن كتابة شرط استمرار التطبيقين g_1 و g_2 في حالة الزمرة الضربية بالشكل:

يكون g_1 مستمراً في x (أو في y) إذا وفقط إذا كان من أجل أي مجاورة W للنقطة (xy) توجد مجاورة U (أو V) للنقطة x (أو للنقطة y) بحيث يكون $xV \subseteq W$ (أو $Uy \subseteq W$)، وإذا كان G تبديلية عندئذٍ فإن شرط الاستمرار من اليمين ومن اليسار لـ g_1 من أجل أي متحول يكون متكافئة.

إضافةً إلى ذلك فإن g_1 يكون مستمراً في x و y معاً إذا كان من أجل أي مجاورة W للعنصر xy توجد مجاورة U للنقطة x و مجاورة V للنقطة y بحيث يكون $UV \subseteq W$، وبطريقة مشابهة فإن g_2 يكون مستمراً في x إذا كان من أجل أي مجاورة W للنقطة (x^{-1}) توجد مجاورة U للنقطة x بحيث يكون $U^{-1} \subseteq W$

مبرهنة (1):

ليكن a عنصراً ثابتاً من الزمرة نصف الطبولوجية G، عندئذٍ فإن كلاً من التطبيقين:

$L_a: x \to ax$ ، $R_a: x \to xa$

من G إلى G يكون هوميومورفيزماً.

هوميومورفيزم:
1- تقابل
2- التطبيق مستمر
3- التطبيق العكسي مستمر

البرهان: من الواضح أن R_a تطبيق متباين وغامر إذاً هو تقابل

لنبرهن أن ρ_a مستمر في النقطة الاختيارية x من G من أجل ذلك $\rho_a(x) = ax$ ،
لتكن W مجاورة ما للنقطة xa ، وبما أن g مستمر على $G \times G$ فإنه يكون مستمراً في النقطة
(x,a) بالنسبة لـ x وبالتالي توجد مجاورة U للنقطة x بحيث يكون $Ua \subseteq W$
أي أن $\rho_a(U) \subseteq W$ أي أن ρ_a مستمر في النقطة الاختيارية x وبالتالي فهو مستمر
على كامل G .

$\rho_a^{-1} : G \to G$

$xa \to x$

$x \to xa^{-1}$ ($\rho_{a^{-1}}$)

أي أن $\rho^{-1}(a) = \rho_{a^{-1}}$

وبنفس الطريقة يمكن إثبات أن $\rho_a^{-1} = \rho_{a^{-1}}$ مستمر على G وبالتالي فإن ρ_a هوميومورفيزم
وبشكل مشابه نبرهن أن λ_a هوميومورفيزم .

مبرهنة 2: لتكن F مجموعة مغلقة، و P مجموعة مفتوحة، و A مجموعة جزئية من الزمرة الدنف طوبولوجية G، و $a \in G$ عندئذٍ يكون:

① Fa و aF مجموعتين مغلقتين

② Pa ، aP ، و AP ، PA هي مجموعات مفتوحة.

البرهان:

① بما أن كل من ρ_a و λ_a هومومورفيزم فإن صورة أي مجموعة مغلقة وفق أي من التطبيقين هي مجموعة مغلقة أي أن:

$\rho_a(F) = Fa$ مغلقة

$\lambda_a(F) = aF$ مغلقة

② لنفس السبب السابق فإن كل من Pa و aP مفتوحة.

$$AP = \bigcup_{a \in A} aP \quad , \quad PA = \bigcup_{a \in A} Pa$$

وبما أن كل من Pa و aP مجموعة مفتوحة $\forall a \in A$ فإن اجتماع مجموعات مفتوحة هو مجموعة مفتوحة إذن AP و PA كل منهما مفتوحة.

مبرهنة (3):

لتكن G زمرة نصف طوبولوجية، عندئذٍ لأي عنصرين $x_1, x_2 \in G$ يوجد هومومورفيزم f على G، بحيث يكون $f(x_1) = x_2$.

البرهان:

لتكن $a = x_1^{-1} x_2 \in G$ فإذا أخذنا $f = \rho_a$ فإنه ينتج:

$$f(x_1) = \rho_a(x_1) = x_1 a = x_1 x_1^{-1} x_2 = (x_1 x_1^{-1}) x_2 = e x_2 = x_2$$

ومن المعروف أن ρ_a هو هومومورفيزم (من المبرهنة (1))

* جملة مجاورات العنصر الحيادي في الزمرة النصف طبولوجية:

من المبرهنة (2) في الفقرة السابقة ينتج أنه إذا عرفنا جملة مجاورات أساسية للعنصر الحيادي e عندئذٍ نعرف جملة المجاورات الأساسية لأي عنصر من الزمرة النصف طبولوجية.

مبرهنة (4):

إذا كانت $\{U\}$ جملة أساسية من مجاورات المفتوحة للعنصر الحيادي e في الزمرة النصف طبولوجية G، عندئذٍ فإن $\{xU\}$، $\{Ux\}$ $(\forall x \in G)$ تشكلان قاعدتين للطبولوجيا على G.

البرهان: لتكن $a \in G$، ولتكن W مجاورة مفتوحة للعنصر a بما أن التطبيق $\lambda_{a^{-1}} : G \to G$ حيث $\lambda_{a^{-1}}(x) = a^{-1}x$ هومومورفيزم فإن:



$\omega a^{-1} = f_a^{-1}(\omega)$ تكون مجموعة مفتوحة حاوية للعنصر e أي أن ωa^{-1} هي مجاورة مفتوحة للعنصر e.

وبما أن الأسرة $\{U\}$ هي جملة أساسية لجوارات العنصر e فإنه يوجد $U \in \{U\}$ بحيث يكون $e \in U \subseteq \omega a^{-1} \Rightarrow aU \subseteq \omega$ ← مجاورة مفتوحة للعنصر a

ومنه نستنتج أن $\{aU\}$ هي جملة أساسية لمجاورات العنصر a، وحسب ملاحظة من الطبولوجيا ينتج أن الأسرة $\{xU\}_{\forall x \in G}$ تشكل قاعدة للفضاء الطبولوجي G.

[الملاحظة: الشرط اللازم والكافي كي تكون أسرة المجموعات المفتوحة B قاعدة للفضاء الطبولوجي X هو أن تكون أسرة المجموعات $\{V\} = \{V ; V \in B, x \in V\}$ تشكل جملة أساسية لمجاورات النقطة x وذلك $\forall x \in X$]

* الإنشاء: زمر نصف طبولوجية من زمر أخرى:

إن الزمر الجزئية، زمر القسمة، زمر الجداء من الزمر النصف طبولوجية جميعها زمر تنتج من زمر أخرى.

فإذا كانت G زمرة نصف طبولوجية، H زمرة جزئية من G عندئذٍ فإن H تشكل مع الطبولوجية المولدة من G ما يسمى ((الزمرة النصف طبولوجية الجزئية)).

زد على ذلك إذا كانت G زمرة نصف طبولوجية و H زمرة جزئية ناظمية من G عندئذٍ فإن G/H أي أسرة المجموعات $\{xH\}$ حيث $x \in G$ تشكل زمرة تسمى زمرة القسمة (G على H)

فإذا كان φ التطبيق القانوني فإننا نعرف طبولوجيا القسمة على G/H بالشكل التالي: أي مجموعة ω من G/H تكون مفتوحة إذا وفقط إذا كانت $\varphi^{-1}(\omega)$ مفتوحة في G، فإن G/H تكون زمرة نصف طبولوجية، كما سنبين أنه إذا كانت G_α ، $\forall \alpha \in I$ أسرة من الزمر النصف طبولوجية عندئذٍ فإن الجداء $G = \prod_{\alpha \in I} G_\alpha$ يكون زمرة نصف طبولوجية حيث أن الطبولوجية المعرفة على $G = \prod_{\alpha \in I} G_\alpha$ هي طبولوجية الجداء المعرفة سابقاً.